

# 数 学

(理 学 部 ・ 工 学 部)

(令 和 7 年 度)【後期日程】

問題冊子 1～4 ページ

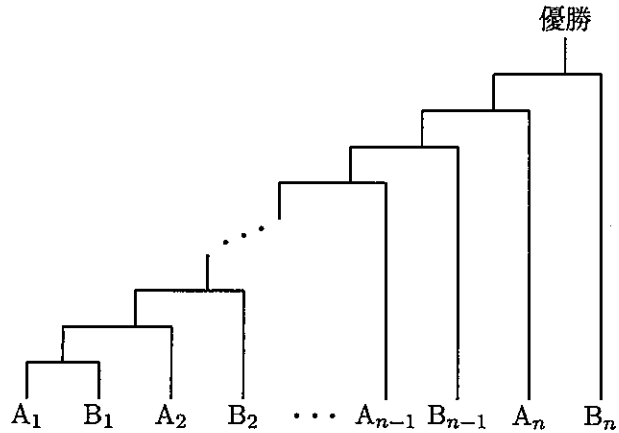
答案用紙 4 枚

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号等を記入する部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4枚の答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)、(その4)の順になるように机の上におくこと。
6. 退室するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

A グループに属する  $n$  名の選手  $A_1, A_2, \dots, A_n$  と B グループに属する  $n$  名の選手  $B_1, B_2, \dots, B_n$  が勝ち残り式トーナメントで優勝を争う。トーナメントの組み合わせは下の表とする。



A グループの選手は B グループの選手に確率  $\frac{2}{3}$  で勝利し、同グループの選手同士はそれぞれ確率  $\frac{1}{2}$  で勝利する。ただし、試合には引き分けはないものとする。優勝者が A グループに属する確率を  $p_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $p_1, p_2$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  のとき、 $p_n$  を  $p_{n-1}$  の式で表せ。
- (3)  $p_n$  を求めよ。

2

$a$  は正の実数とする。 $xy$  平面において、点  $A(0, a)$  を中心とする半径  $r$  の円

$$C: x^2 + (y - a)^2 = r^2$$

は  $y \geq x^2$  の範囲にあり  $y = x^2$  に接している。次の問いに答えよ。

- (1) 点  $A$  と  $y = x^2$  上の点  $(t, t^2)$  の距離の 2 乗を  $f(t)$  とおく。 $f(t)$  の最小値と  $f(t)$  が最小値をとるときの  $t$  を求めよ。
- (2) 円  $C$  が  $y = x^2$  と異なる 2 点で接するときの  $a$  の範囲を求めよ。また、そのときの半径  $r$  と接点の座標をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた異なる接点を  $P, Q$  とするとき、 $\angle PAQ = \frac{2\pi}{3}$  となるとする。
  - (ア)  $a$  と  $r$  を求めよ。
  - (イ) 円  $C$  に沿って  $P$  と  $Q$  を結ぶ短い方の円弧と  $y = x^2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

3

$f(x) = \tan x$  とおく。実数  $a, b, c$  ( $0 < a < b < c < \frac{\pi}{2}$ ) は

$$\begin{aligned}f(a) + f(b) + f(c) &= 6 \\f'(a) + f'(b) + f'(c) &= 17 \\f''(a) + f''(b) + f''(c) &= 84\end{aligned}$$

を満たすとする。  $p = f(a)$ ,  $q = f(b)$ ,  $r = f(c)$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $f'(x)$  と  $f''(x)$  をそれぞれ  $f(x)$  の式で表せ。
- (2)  $p^2 + q^2 + r^2$ ,  $p^3 + q^3 + r^3$ ,  $pqr$  を求めよ。
- (3)  $p, q, r$  を求めよ。
- (4)  $a + b + c$  を求めよ。

4

$f(x) = e^{\frac{x-1}{e-1}}$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(1), f(e)$  を求めよ。
- (2)  $g(x) = x - f(x)$  の最大値を求めよ。また、 $g(x) > 0$  となるような  $x$  の範囲を求めよ。
- (3)  $xy$  平面において、連立不等式

$$\begin{cases} y \geq f(x) \\ x \geq f(y) \end{cases}$$

で定まる図形  $D$  の面積  $S$  を求めよ。

- (4)  $h(x) = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x$  を微分せよ。
- (5) (3) で定めた図形  $D$  を、 $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

受験番号				

受験番号				

1. 解答する前に受験番号記入欄 2 箇所受験番号を正しく記入すること。
2. 解答等記入の際は太い縦線より右にはみ出さないこと。
3. ※印欄には記入しないこと。

1

1

※
---

※
---

裏面にまで解答が及ぶ場合には、「裏に続く」と下に書いて下さい。

この部分には記入しないこと

この部分には記入しないこと

受験番号				

受験番号				

1. 解答する前に受験番号記入欄2箇所受験番号を正しく記入すること。
2. 解答等記入の際は太い縦線より右にはみ出さないこと。
3. ※印欄には記入しないこと。

2

2

※
---

※
---

裏面にまで解答が及ぶ場合には、「裏に続く」と下に書いて下さい。

この部分には記入しないこと

この部分には記入しないこと

受験番号				

受験番号				

1. 解答する前に受験番号記入欄 2 箇所受験番号を正しく記入すること。
2. 解答等記入の際は太い縦線より右にはみ出さないこと。
3. ※印欄には記入しないこと。

3

3

※
---

※
---

裏面にまで解答が及ぶ場合には、「裏に続く」と下に書いて下さい。

この部分には記入しないこと

この部分には記入しないこと

受験番号				

受験番号				

1. 解答する前に受験番号記入欄2箇所受験番号を正しく記入すること。
2. 解答等記入の際は太い縦線より右にはみ出さないこと。
3. ※印欄には記入しないこと。

4

4

※
---

※
---

裏面にまで解答が及ぶ場合には、「裏に続く」と下に書いて下さい。

この部分には記入しないこと

この部分には記入しないこと